

Mathematics

מבנים מתמטיקה

חוברת תרגילים

שיטות כמותיות

תוכן עניינים

3.....	וקטורים.....
3.....	שאלה מספר 1 – זזית בין וקטורים.....
4.....	שאלה מספר 2 – נורמה.....
5.....	שאלה מספר 3 – אורתוגונליות.....
6.....	מטריצות.....
6.....	שאלה מספר 4 – מטריצה ריבועית וסימטרית.....
7.....	מרחבים אוקלידיים.....
7.....	שאלה מספר 6 – מרחב נפרש.....
8.....	שאלה מספר 7 – מרחב נפרש.....
9.....	שאלה מספר 8 – בסיס לתת-מרחב.....
10.....	שאלה מספר 9 – בסיס לתת-מרחב.....
11.....	שאלה מספר 10 – מימד של תת מרחב.....
12.....	שאלה מספר 11 – מימד של תת מרחב.....
13.....	שאלה מספר 12 – בסיס לתת-מרחב.....
14.....	חקירת מערכת משוואות לינאריות.....
14.....	שאלה מספר 13 – מימד מרחב הפתרונות.....
15.....	שאלה מספר 14 – מערכת משוואות לא הומוגנית.....
16.....	שאלה מספר 15 – מערכת משוואות לא הומוגנית.....
17.....	דטרמיננטה.....
17.....	שאלה מספר 16 – חישוב דטרמיננטה.....
18.....	שאלה מספר 17 – חישוב דטרמיננטה.....
19.....	שאלה מספר 18 – המטריצה המצורפת.....
20.....	שאלה מספר 19 – המטריצה המצורפת.....
21.....	מטריצה הפיכה.....
21.....	שאלה מספר 20 – מטריצה הפיכה.....

- 22.....שאלה מספר 21 – מטריצה הפיכה
- 23.....שאלה מספר 22 א' – מטריצה הפיכה
- 24.....שאלה מספר 22 ב' – מטריצה הפיכה
- 25.....שאלה מספר 23 א' – מטריצה הפיכה
- 26.....שאלה מספר 23 ב' – מטריצה הפיכה 2×2
- 27.....שאלה מספר 24 – חישוב הופכית
- 28.....שאלה מספר 25 – חישוב הופכית
- 29.....**ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים**
- 29.....שאלה מספר 26 – מציאת ערכים עצמיים
- 30.....שאלה מספר 27 – מציאת ערכים עצמיים
- 31.....שאלה מספר 28 – מציאת ערכים עצמיים
- 32.....שאלה מספר 29 – לכסון מטריצה
- 33.....שאלה מספר 30 – לכסון מטריצה
- 34.....**תבניות ריבועית וחקירת פונקציות**
- 34.....שאלה מספר 31 – תבנית ריבועית חיובית לחלוטין
- 35.....שאלה מספר 32 – תבנית ריבועית חיובית לחלוטין
- 36.....שאלה מספר 33 – מציאת נקודות קיצון

וקטורים

שאלה מספר 1 – זזית בין וקטורים

נתונים \underline{x} , \underline{y} שני וקטורים מגודל m כך שהאורך של \underline{x} הוא 3, האורך של \underline{y} הוא 2 והמכפלה הסקלרית שלהם שווה ל-3.

אז הזווית בין הוקטורים היא:

- א) 60 מעלות
- ב) 30 מעלות
- ג) 150 מעלות
- ד) אף אחת מהתשובות לא נכונה

שאלה מספר 2 – נורמה

יהיו $(1,1)$, $(k^2, k + 1)$ וקטורים מגודל 2.

מצא את ערכי k כך שהוקטורים יהיו מאונכים וחשב את הנורמה של שני הוקטורים.

שאלה מספר 3 – אורתוגונליות

מצא וקטור מאונך לוקטור $(1, 0, -1)$ כך שאורכו הוא 1.

מטריצות

שאלה מספר 4 – מטריצה ריבועית וסימטרית

טענה א': אם A סימטרית, אזי גם A^2 סימטרית.

טענה ב': אם A, B ריבועיות ו- A סימטרית, אזי גם $B^t A B$ סימטרית.

לפיכך:

(א) שתי הטענות נכונות.

(ב) רק טענה א' נכונה.

(ג) רק טענה ב' נכונה.

(ד) שתי הטענות לא נכונות.

מרחבים אוקלידיים

שאלה מספר 6 – מרחב נפרש

במרחב E^3 נתונים $\underline{u} = (1,1,0)$, $\underline{v} = (3,3,2)$, $\underline{w} = (0, -1,1)$

$$U = \text{span}(\{\underline{v}, \underline{w}\}) \text{ - ו-}$$

בחרו את הטענה הנכונה:

(א) כל התשובות האחרות אינן נכונות

$$\underline{u} \in U \text{ (ב)}$$

$$\|\underline{u}\| = 2 \text{ (ג)}$$

$$\|\underline{u}\| \neq \|\underline{w}\| \text{ (ד)}$$

שאלה מספר 7 – מרחב נפרש

במרחב E^4 נתון $U = \text{span}(\{(1,0,1,1), (1,1,1,0), (-1, -3, -1, 2)\})$.

נתון הוקטור

$$\begin{pmatrix} a + b \\ b + 2 \\ a + 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

מה הם הערכים של a, b כך שהוקטור יהיה שייך ל- U ?

א) $a = 6, b = 3$

ב) $a = 3, b = 2$

ג) $a = 0, b = 4$

ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות.

שאלה מספר 8 – בסיס לתת-מרחב

נתונה קבוצה של וקטורים

$$U = \text{span}(\{(1,0,1,1), (1,1,1,0), (-1, -3, -1, 2)\})$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_3 = 0\}$$

טענה א': $\{(1,0,1,1), (0,1,0, -1)\}$ מהווה בסיס לתת המרחב U .

טענה ב': $W \subset U$

טענה ג': $\{(1,0,1,0), (0,1,0,0)\}$ מהווה בסיס לתת המרחב W

- (א) רק טענה א' נכונה
- (ב) רק טעות א' ו-ג' נכונות
- (ג) כל הטענות נכונות
- (ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 9 – בסיס לתת-מרחב

נתונה קבוצה של וקטורים $U = \text{span}(\{(1,0,2,0), (1,1,1,1), (1,0,0,0)\})$

ו- $W = \text{span}(\{(1,0,1,1), (1,2,1,1), (0,0,1,0)\})$

מהווה בסיס לתת המרחב U טענה א': $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

מהווה בסיס ל- \mathbb{R}^4 טענה ב': $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

מהווה בסיס לתת המרחב W טענה ג': $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- (א) רק טענה א' נכונה
- (ב) רק טענות א' ו-ג' נכונות
- (ג) כל הטענות לא נכונות
- (ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 10 – מימד של תת מרחב

נתונה קבוצה של וקטורים

$$U = \text{span}(\{(1,0,1,1), (1,1,1,0), (-1, -3, -1, 2)\})$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 - x_3 = 0\}$$

- (א) מימד $U \cap W$ שווה ל-2
(ב) מימד $U \cap W$ שווה ל-3
(ג) מימד $U \cap W$ שווה ל-1
(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 11 – מימד של תת מרחב

המימד של תת המרחב:

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{array} \right\}$$

שווה ל-

3 (א)

1 (ב)

2 (ג)

ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 12 – בסיס לתת-מרחב

נתונה קבוצה של וקטורים $U = \text{span}(\{(1,0,2,0), (1,1,1,1), (1,0,0,0)\})$

ו- $W = \text{span}(\{(1,0,1,1), (1,2,1,1), (0,0,1,0)\})$

(א) מימד $U \cap W$ שווה ל- 2

(ב) מימד $U \cap W$ שווה ל- 3

(ג) מימד $U \cap W$ שווה ל- 1

(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

חקירת מערכת משוואות לינאריות

שאלה מספר 13 – מימד מרחב הפתרונות

מימד של תת המרחב

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

שווה ל-

2 (א)

1 (ב)

3 (ג)

ד) כל התשובות האחרות לא נכונות

שאלה מספר 14 – מערכת משוואות לא הומוגנית

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\2x_1 + 5x_2 + (a + 6)x_3 &= 1 \\3x_1 + (6 - 2a)x_2 + (9 - 2a)x_3 &= -a\end{aligned}$$

טענה א': כאשר יש למערכת פתרון יחיד $x_3 = \frac{1}{2(a-1)}$

טענה ב': כאשר $a = 0$ למערכת אין פתרון

- (א) רק טענה א' נכונה
- (ב) רק טענה ב' נכונה
- (ג) שתי הטענות נכונות
- (ד) אף אחת מהטענות אינה נכונה

שאלה מספר 15 – מערכת משוואות לא הומוגנית

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\3x_1 - 7x_2 + (k^2 + 1)x_3 &= k^2 - 1 \\4x_1 - 6x_2 + (k + 2)x_3 &= 4\end{aligned}$$

טענה א': כאשר יש למערכת פתרון יחיד $x_3 = \frac{k+2}{k+1}$

טענה ב': כאשר $k = 2$ יש למערכת אינסוף פתרונות

- (א) שתי הטענות נכונות
- (ב) רק טענה א' נכונה
- (ג) רק טענה ב' נכונה
- (ד) שתי הטענות אינן נכונות

דטרמיננטה

שאלה מספר 16 – חישוב דטרמיננטה

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

אז הדטרמיננטה של A היא:

- א) -120
- ב) 0
- ג) 24
- ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 17 – חישוב דטרמיננטה

נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & a & -a \\ -a & a & a & -a \\ a & a & a & a \\ -a & -a & a & a \end{pmatrix}$$

אז הדטרמיננטה של A היא:

א $-16a^4$

ב $8a^4$

ג 0

ד כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 18 – המטריצה המצורפת

נתונה מטריצה ריבועית A מגודל 3×3 . נתון ש- $\det(A) = -3$ ונתון ש- A^* המטריצה הצמודה. אזי $\det(2A^*)$ שווה בהכרח ל-

72 (א)

-72 (ב)

-6 (ג)

(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 19 – המטריצה המצורפת

נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 4×4 .

נתון ש- $\det(A) = -3$ ונתון ש- A^* המטריצה הצמודה.

אזי $\det(2A^*)$ שווה בהכרח ל-

(א) -432

(ב) -216

(ג) 162

(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

מטריצה הפיכה

שאלה מספר 20 – מטריצה הפיכה

נתונה מטריצה ריבועית A מגודל $n \times n$ ונתון ש- A^2 הפיכה.

טענה א': גם מטריצה A הפיכה

טענה ב': הדרגה של מטריצה A היא n

(א) שתי הטענות נכונות

(ב) רק טענה א' נכונה

(ג) רק טענה ב' נכונה

(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 21 – מטריצה הפיכה

נתונה מטריצה ריבועית A כך ש- $A^4 + A^2 - A^{-1} = 0$ אזי

- (א) המטריצה ההפיכה ל- A^3 היא $A^2 + I$
- (ב) A^3 אינה הפיכה
- (ג) לא ניתן לחשב את המטריצה ההפיכה ל- A^3 לפי המשוואה הנתונה
- (ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 22 א' – מטריצה הפיכה

נתונות מטריצות ריבועיות A, B מגודל $n \times n$ כך ש- A אינה הפיכה.

טענה א': גם מטריצה AB אינה הפיכה

טענה ב': הדרגה של מטריצה B קטנה מ- n .

(א) רק טענה א' נכונה

(ב) שתי הטענות נכונות

(ג) רק טענה ב' נכונה

(ד) שתי הטענות אינן נכונות

שאלה מספר 22 ב' – מטריצה הפיכה

נתונות מטריצות A ו- B מסדר 4×4 כאשר נתון

$$A \cdot B \cdot A^{-1} - 3(A \cdot B)^{-1} = 0$$

ונתון ש- $\det(A) = 1$ אז

(א) $|B| = \pm 9$

(ב) $|B| = 9$

(ג) לא ניתן לחשב את $|B|$

(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 23 א' – מטריצה הפיכה

נתונות שתי מטריצות הפיכות A ו- B מגודל 3×3 כך שמתקיים

$$3B^t A^{-1} B + 2A^2 B^{-1} = 0$$

ו- $|A| = 3$ אז

(א) $|B| = -2$

(ב) לא ניתן לחשב את $|B|$

(ג) $|B| = -\frac{2}{3}$

(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 23 ב' – מטריצה הפיכה 2×2

נתון $AXB = C$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(א)}$$

$$X = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(ב)}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{(ג)}$$

ד) אף אחת מהתשובות האחרות לא נכונה

שאלה מספר 24 – חישוב הופכית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ נתונה המטריצה}$$

(א) וקטור עמודה שלישי ב- A^{-1} הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ -0.8 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

(ב) וקטור עמודה שלישי ב- A^{-1} הוא $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(ג) וקטור שורה שלישית ב- A^{-1} הוא $(0,0,1)$

(ד) אף אחת מהתשובות האחרות נכונה

שאלה מספר 25 – חישוב הופכית

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ נתונה המטריצה}$$

טענה א': וקטור עמודה ראשון ב- A^{-1} הוא $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

טענה ב': וקטור שורה שניה ב- A^{-1} הוא $(-1, 3, -1)$

טענה ג': וקטור עמודה שני ב- A^{-1} הוא $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(א) רק טענות א' ו- ב' נכונות

(ב) כל הטענות נכונות

(ג) רק טענה א' נכונה

(ד) אף אחת מהתשובות לא נכונה

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

שאלה מספר 26 – מציאת ערכים עצמיים

נתונה מטריצה ריבועית A מסדר 2×2 . נתון $tr(A) = 6$ ו- $|A| = 8$. אז הערכים העצמיים של A הם

(א) 2,4

(ב) -2, -4

(ג) 8,1

(ד) אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

שאלה מספר 27 – מציאת ערכים עצמיים

נתונה מטריצה ריבועית מסדר 3×3 . נתון:

$$\operatorname{tr}(A) = 7 \quad |A| = 9$$

אז הערכים העצמיים של A יכולים להיות

(א) 1,3,3

(ב) -1, -3,3

(ג) 1,2,4

(ד) אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

שאלה מספר 28 – מציאת ערכים עצמיים

נתונה מטריצה ריבועית A כך ש- $(A - 2I)(A + I) = 0$.

טענה א': הפיכה ו- $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$

טענה ב': 2 הוא ערך עצמי של A

(א) שתי הטענות נכונות

(ב) רק טענה א' נכונה

(ג) רק טענה ב' נכונה

(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 29 – לכסון מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ נתונה המטריצה}$$

- (א) למטריצה יש שני ערכים עצמיים שונים והיא ניתנת ללכסון
(ב) למטריצה יש שלושה ערכים עצמיים שונים והיא ניתנת ללכסון
(ג) למטריצה יש שני ערכים עצמיים שונים והיא לא ניתנת ללכסון
(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 30 – לכסון מטריצה

נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

- (א) למטריצה יש שלושה ערכים עצמיים שונים והיא ניתנת ללכסון
(ב) למטריצה יש שני ערכים עצמיים שונים והיא ניתנת ללכסון
(ג) למטריצה יש שני ערכים עצמיים שונים והיא לא ניתנת ללכסון
(ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

תבניות ריבועית וחקירת פונקציות

שאלה מספר 31 – תבנית ריבועית חיובית לחלוטין

עבור אילו ערכים של a תהיה התבנית הריבועית $x^t Ax$ מוגדרת חיובית לחלוטין כאשר

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

א) $a > 1$

ב) $a > 0$

ג) $a > -2$

ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 32 – תבנית ריבועית חיובית לחלוטין

עבור אילו ערכים של a תהיה התבנית הריבועית $\underline{x}^t A \underline{x}$ מוגדרת חיובית לחלוטין כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

א) $-0.5 < a < 1$

ב) $a > 1$

ג) $a < -1$

ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות

שאלה מספר 33 – מציאת נקודות קיצון

נתונה הפונקציה

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2x + 4y - 12z$$

- א) לפונקציה יש נקודת מינימום מקומית
- ב) לפונקציה יש נקודת מקסימום מקומית
- ג) לפונקציה יש שתי נקודות מינימום מקומיות
- ד) כל התשובות האחרות אינן נכונות